2011 年度 微分積分学 B 演習 1 （担当：日野）

以下の問題 **[1-1]**〜**[1-3]** を解き，レポートとして次週 (10/20) の講義時に提出しなさい．
問題 **[1-4]**〜**[1-9]** は次回（以降）の演習の時間に黒板での発表を募る．

[1-1] 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ を考える．

(1) この級数は区間 $[0,1)$ 上で広義一様収束することを示しなさい．

(2) この級数は区間 $[0,1)$ 上で一様収束するかどうか判定しなさい．

[1-2] 次のベキ級数の収束半径を求めなさい．

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{n!}x^n$$

[1-3] 区間 I 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が f に I 上一様収束するとき，I の点 x_0 に収束する I 内の任意の数列 $\{x_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$ となることを示しなさい．
(Hint: 講義の定理 10.3 (i) より，f は I 上で連続である．)

[1-4] r を $|r|<1$ なる実数定数とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示しなさい．

[1-5] 問 **[1-3]** において，「一様収束」を「各点収束」に置き換えると主張は成り立たない．反例を 1 つ与えなさい．

[1-6] 次の命題が真ならば証明し，偽ならば反例を挙げなさい: 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ がそれぞれ f, g に I 上で一様収束するとき，

(1) $\{f_n+g_n\}$ も $f+g$ に I 上で一様収束する．

(2) $\{f_ng_n\}$ も fg に I 上で一様収束する．

[1-7] 次のベキ級数の収束半径を求めなさい．ただし (2) で α は実数定数であり，

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

とする．

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}x^{2n} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

((2) は落とし穴に注意．)

（裏面へ続く）

[1-8] $f_n(x) = x\,\mathrm{Arctan}(nx)$, $f(x) = \dfrac{\pi|x|}{2}$ とする．関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示しなさい．

[1-9] $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続だが，$x = 0$ では微分可能でないことを示しなさい．

訂正 前回配布したプリントの「定理 10.3(2) の前半部の証明」の最初の部分を，以下のように訂正します．

誤：各 f_n は有界関数なので，演習 [0-3] より f は有界関数である．

正：各 f_n は有界関数で，f_n は f に一様収束するので，f も有界関数である．（なぜそうなのかは皆さんへの問題とする．）