2011年度前期 自然現象と数学　期末試験　(担当：山本裕)

1

$\mathbb{N}$を自然数全体とする．$\mathbb{N}$における関係$\sim$を

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ と } b \text{ を } 3 \text{ で割った余りが等しい } (a, b \in \mathbb{N})$$

と定義する．関係$\sim$は同値関係であることを示せ．

2

関数$g(x)$は$[0,1]$で連続，$(0,1)$で微分可能，かつ$g(0)=g(1)=0$であるとする．このときある$\xi \in (0,1)$に対して

$$g'(\xi) = g(\xi)$$

が成り立つことを示せ．

(ヒント：適当な微分可能な関数$h(x)$に対して$g(x)h(x)$に積の微分公式を適用し，Rolleの定理に帰着させよ．関数の積$g(x)h(x)$の連続性と微分可能性は既知としてよい．)

(裏に続く)

3

微分方程式

$$x''(t) - x(t) = 0 \quad (t \geq 0) \tag{1}$$

を初期条件

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

のもとで解きたい.

小問 1

微分方程式 (1) の解 x を用いて

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

を定義する. このとき, ある行列 A で

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \quad (t \geq 0) \tag{2}$$

をみたすものを求めよ.

小問 2

小問 1 で求めた行列 A を用いて $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ を以下のように逐次的に定義する：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0(t) &:= \boldsymbol{x}(0), \\
\boldsymbol{x}_1(t) &:= \boldsymbol{x}(0) + \int_0^t A\boldsymbol{x}_0(\tau)d\tau, \\
\boldsymbol{x}_2(t) &:= \boldsymbol{x}(0) + \int_0^t A\boldsymbol{x}_1(\tau)d\tau, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}_n(t) &:= \boldsymbol{x}(0) + \int_0^t A\boldsymbol{x}_{n-1}(\tau)d\tau, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

上式で定義される $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は微分方程式 (2) の解 $\boldsymbol{x}$ に収束することが知られている. この事実を用いて微分方程式 (1) の解を求めよ. ただし

$$\cosh t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

を用いてよい.