H23 前

よいこの

せんけいだいすうがく ええ

No. ・ ・ ( )

レポート1解答例

1-1

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ として,

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W$ とする。

(i) 加法

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ について,

$$c_1(x_1 + y_1) + c_2(x_2 + y_2) + c_3(x_3 + y_3)$$
$$= \underbrace{(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)}_{0} + \underbrace{(c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3)}_{0} = 0 \quad (\because 定義)$$

よって, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

(ii) スカラー倍

$\alpha \in \mathbb{C}$ として,

$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ について,

$$c_1\alpha x_1 + c_2\alpha x_2 + c_3\alpha x_3$$
$$= \alpha\underbrace{(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)}_{0} = 0 \quad (定義)$$

よって $\alpha\boldsymbol{x} \in W$

(i), (ii) より W は V の部分ベクトル空間 ■

1-2

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 + W_2 \quad (\boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{y} \in W_2)$

$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' \in W_1 + W_2 \quad (\boldsymbol{x}' \in W_1, \boldsymbol{y}' \in W_2)$

とする。

(i) 加法

$$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}')$$
$$= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}')$$

ここで, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in W_1$, $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}' \in W_2$

($\because$ W_1, W_2 は部分ベクトル空間)

よって $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' \in W_1 + W_2$

1-2 続

(ii) スカラー倍

$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して,

$$\alpha\boldsymbol{z} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$$

ここで, $\alpha\boldsymbol{x} \in W_1$, $\alpha\boldsymbol{y} \in W_2$

($\because$ W_1, W_2 は部分ベクトル空間)

(i), (ii) より $W_1 + W_2$ も V の部分ベクトル空間 ■

1-3

$\dim(W_1 \cap W_2) = d$ として

$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_d\}$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする。

このとき, $\dim W_1 = n$, $\dim W_2 = m$ として,

$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_{d+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を W_1 の基底,

$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{w}_{d+1}, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W_2 の基底

とすることができる。

・以下で $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_{d+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_{d+1}, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$ が $W_1 + W_2$ の基底であることを示す。

$\boldsymbol{x} \in W_1$, $\boldsymbol{y} \in W_2$ を

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_d\boldsymbol{u}_d + a_{d+1}\boldsymbol{v}_{d+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$
$$\boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_d\boldsymbol{u}_d + b_{d+1}\boldsymbol{w}_{d+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{w}_m$$

$(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{K})$

とすると, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$ は

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d + a_{d+1}\boldsymbol{v}_{d+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n + b_{d+1}\boldsymbol{w}_{d+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{w}_m$$

$(a_i + b_i = c_i \ (i = 1, \cdots, d)$ とおいた$)$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 0$ とすると,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d + a_{d+1}\boldsymbol{u}_{d+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_m$$
$$= -(b_{d+1}\boldsymbol{w}_{d+1} + \cdots + b_m\boldsymbol{w}_m)$$

$\cdots ①$

せんけいだいすうがくええ

No. . . ( )

レポート1 解答例

$\boxed{1-3}$ 続き.

①の左辺は W_1 の元を表し,

右辺は W_2 の元を表している。

これが等号で結ばれているから,左辺と右辺は

互いに $W_1 \cap W_2$ の元である。

したがって,

$$c_1 u_1 + \cdots + c_d u_d + a_{d+1} v_{d+1} + \cdots + a_n v_n$$
$$= c_1' u_1 + \cdots + c_d' u_d$$

とあらわせる。 すると,①は

$$c_1' u_1 + \cdots + c_d' u_d + b_{d+1} w_{d+1} + \cdots + b_m w_m = 0$$

$\{u_1, \cdots, u_d, w_{d+1}, \cdots, w_m\}$ は一次独立

であるから このとき

$$c_1' = \cdots = c_d' = b_{d+1} = \cdots = b_m = 0.$$

で,①は次のようになる。

$$c_1 u_1 + \cdots + c_d u_d + a_{d+1} v_{d+1} + \cdots + a_n v_n = 0$$

$\{u_1, \cdots, u_d, v_{d+1}, \cdots, v_n\}$ は一次独立であるから,このとき

$$c_1 = \cdots = c_d = a_{d+1} = \cdots = a_n$$

以上から, $x + y = 0$ のとき

$$c_1 = \cdots = c_d = a_{d+1} \cdots = a_n = b_{d+1} = \cdots = b_m = 0$$

である。ゆえに $\{u_1, \cdots, u_d, v \sim\sim\}$

は1次独立。

雰囲気でよめ

また, $x + y$ は $W_1 + W_2$ の

任意の元をあらわしている。

したがって, $\{u_1, \cdots, u_d, v_{d+1}, \sim\}$

は $W_1 + W_2$ の基底である。

よって,

$$\dim(W_1 + W_2) = d + (n-d) + (m-d)$$
$$= n + m - d = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$\dim \bigcirc$ = (基底の数)

定義

$\boxed{1-3}$ → 『線型代数学入門』

(齋藤) P109