2011 年度前期 微分積分学 A 演習 11　(担当：日野)

以下の問題 **[11-1]**〜**[11-3]** を解き，レポートとして次週 (7/21) の講義時に提出しなさい．
問題 **[11-4]**〜**[11-9]** は次回の演習の時間に黒板での発表を募る．

[11-1] $0 \le \alpha < 1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha} \log x \, dx$ が収束することを示し，その値を求めなさい．

[11-2] (1) ある定数 $a > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ が存在して，$0 < x \le a$ のとき不等式

$$c_1 x^4 \le 1 - \cos(x^2) \le c_2 x^4$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{100} \frac{1-\cos(x^2)}{x^s} \, dx$ が収束するような実数 s の範囲を求めなさい．

[11-3] 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束するような実数 α の範囲を求めなさい．(Hint: 広義積分との比較．)

[11-4] 次の広義積分が収束することを示し，その値を求めなさい．ただし (2) で n は自然数，(3) で $a < b$ とする．

$$(1) \int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx \qquad (2) \int_0^1 (\log x)^n \, dx \qquad (3) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, dx$$

$$(4) \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R})$$

[11-5] 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^\lambda} \, dx$ は $\lambda > 1$ のとき収束，$\lambda \le 1$ のとき発散することを示し，収束する場合はその値を求めなさい．

[11-6] f は区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数で，$\displaystyle\int_0^\infty |f(x)| \, dx$ が収束しているものとする．

(1) もし更に f が $[0, \infty)$ 上で一様連続であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であることを示しなさい．

(2) 一様連続性の仮定がなければ，一般には (1) の結論は成り立たない．そのような ($f(x)$ が $x \to \infty$ で 0 に収束しない) 例を 1 つ挙げなさい．

[11-7] f が $[1, \infty)$ 上定義された非負値単調増加関数のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \int_1^n f(x) \, dx \le \sum_{k=2}^{n} f(k) \qquad n \ge 2$$

を示し，$f(x) = \log x$ とすることにより不等式 $en^n e^{-n} \le n! \le (n+1)^{n+1} e^{-n}$ を示しなさい．

(裏面へ続く)

以下は雑多な問題.

[11-8] 連続関数 f に対して，以下の等式を示しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)\,dx$　　(a, b は正の定数)

[11-9] Taylor の公式を援用して，$\sqrt{102}$ を小数第 4 位まで求めなさい.（Hint: $102 = 100 + 2$）