2011 年度 微分積分学 A 演習 7 解答例など　(担当：日野)

[7-1] (1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + c}{2a_n}$.（計算の詳細は略）

(2)（略解 1）帰納法で，$\{a_n\}$ は単調減少かつすべての n に対し $a_n > \sqrt{c}$ であることが示せる．よって $\{a_n\}$ は収束し，極限値を α としたとき (1) で $n \to \infty$ とすることで α についての方程式が導ける．$\alpha \geq \sqrt{c} > 0$ に注意して解くと $\alpha = \sqrt{c}$ を得る．

（略解 2）帰納法で，すべての n に対して $a_n > \sqrt{c}$ であることを示し，

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{c}}{a_n - \sqrt{c}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2a_n} < \frac{1}{2}$$

より

$$0 < a_n - \sqrt{c} < 2^{-n}(a_0 - \sqrt{c})$$

が従い，これから結論を得る．

(3) 略

(4) $h_4 < \dfrac{1}{4} \times 10^{-11}$ のみ示す．$a_3 > 1$, $a_3 > \sqrt{2}$ に注意すると，(3) の関係式より，

$$h_4 = \frac{(a_3^2 - 2)^2}{2a_3(a_3 + \sqrt{2})^2} < \frac{(\frac{1}{408^2})^2}{2 \cdot 1 \cdot (2\sqrt{2})^2} < \frac{1}{400^4 \cdot 2 \cdot 8} < \frac{1}{4} \times 10^{-11}.$$

(コメント) (1), (3) は良いとして，(2) は $\{a_n\}$ が始めから収束するとしてしまった人や，不等式 $a_n > \sqrt{c}$ から直ちに極限が $\sqrt{c}$ であると結論付けた人が見受けられた．(4) で解答例のようにあっさり評価できた人は少なかった．a_3 がほぼ $\sqrt{2}$ であることに注意すれば，どう評価すればよいか方針が立つと思ったのだが．(3) の最初の等式を用いた人もいたが，ある程度精密な評価をしようとすると，h_3(あるいは h_0 など) の評価および計算を精密にしないと誤差が累積してしまい，なかなか要求した評価が出てこない．ただ，その式からは大雑把に言って n が 1 増えると a_n の有効桁が 2 倍になることがわかるため，筋の悪くない考え方である．

さて，解答例のような h_4 の評価はどれくらい精度が良いのか見積もってみよう．分子は 408 を 400 にしたのでそこで 2% の誤差がある．4 乗しているから 1.02^4 倍のずれがある．ε が 0 に近いとき $(1+\varepsilon)^4$ はほぼ $1+4\varepsilon$（2 項定理を考えよう）であるから，$\varepsilon = 0.02$ として 1.02^4 はほぼ 1.08, 誤差を考慮に入れても 1.09 より小さい．分母は a_3 を 1 にしたためずれは悪く見積もって 1.5 倍程度，$h_3 = \sqrt{2a_3h_4} < 10^{-5}$ より $(a_3 + \sqrt{2})^2$ と $(2\sqrt{2})^2 = 8$ は 5 桁程度の精度で一致しているから誤差は無視できると言ってよい．最後の不等式で 1024 を 1000 におきかえたことを考え合わせても，最悪ケースでも $(1.09 \times 1.5 \times 1.024 < 1.1 \times 1.5 \times 1.024 = 1.65 \times 1.024 <)$ 2 倍のずれ，すなわち $h_4 < \dfrac{1}{8} \times 10^{-11}$ と言う評価は得られない（つまり $h_4 \geq \dfrac{1}{8} \times 10^{-11}$）といってよいだろう．暗算程度の計算でもこの位の精度評価ができるのである．

[7-2] (1) 指数関数の定義から $g(x) = e^{x \log x}$．従って，合成関数の微分の公式から

$$g'(x) = e^{x \log x} \times (x \log x)' = e^{x \log x}(\log x + 1) = x^x(\log x + 1).$$

または，$\log g(x) = x \log x$ の両辺を微分して $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \log x + 1$. よって

$$g'(x) = g(x)(\log x + 1) = x^x(\log x + 1).$$

後者のように対数を取って微分する技法を対数微分法という．

(2) 例えば，Arcsin については，$y = \sin x$ とすると $x = \operatorname{Arcsin} y$ で，**[6-7]** より $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\,(\geq 0)$ なので，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

従って $(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 他も同様.

$(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ や $(\operatorname{Arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ は，常識として（導出方法も含めて）知っておくとよい.

なお，$(\operatorname{Arcsin} x)' = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$ という答も間違いではないが，上の答が想定解答であった.

また，講義時に言い忘れたが，三角関数については **[6-7]** の結果から，高校で学んだ全ての関係式が導き出せる.（興味のある人は各自でチェックしなさい.）以後の授業や試験問題では，これらについては認めて使っていくことにする.

[7-3] (1) 自然数 n と正の数 t に対して，$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \geq 1 + nt + \dfrac{n(n-1)}{2} t^2$ であることを使う.

(2) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n+1)! \times 3^n}{(1-3x)^{n+2}}$. Lagrange 剰余項は $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \dfrac{(n+2)(3x)^{n+1}}{(1-3\xi)^{n+3}}$ （但し ξ は 0 と x の間の数）と表せる. $x=0$ のときは明らかに $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(0) = 0$ なので $x \neq 0$ のときを考える. $|\xi| < |x|$ であるから，$|x| < \dfrac{1}{3}$ ならば $|1-3\xi| \geq 1 - 3|x| > 0$. すると

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{(n+2)(3|x|)^{n+1}}{(1-3|x|)^{n+3}} = \frac{n+2}{(1-3|x|)^2} \left(\frac{3|x|}{1-3|x|} \right)^{n+1}.$$

$|x| < \dfrac{1}{6}$ のとき $\dfrac{1-3|x|}{3|x|} > 1$ であるので，(1) より $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(コメント) (2) における $R_{n+1}(x)$ の評価は，$3|x| < \dfrac{1}{2}$ であることを使って

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(1-3|x|)^{n+3}} = \frac{2}{1-3|x|} \cdot (n+2) \left(\frac{1}{2-6|x|} \right)^{n+2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

としても構わない.

ξ は x だけでなく n にも依存していることに注意する. つまり ξ は定数ではないので，ξ を残した形で (1) を用いることはできない.（(1) では，t は n によらない定数である.）変数がどのような依存関係にあるかは常に注意して議論する必要がある.（わかりにくい人向けへの蛇足：次のような例に注意しよう. $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ だが，$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ とすると，任意の n に対して $0 < a_n < 1$ であるにもかかわらず，$\lim_{n\to\infty} a_n^n = \dfrac{1}{e} \neq 0$.）

以上

$1 + nt + {}_nC_2 t^2 \cdots +$

$n(n-1)$