2011年度 微分積分学A 演習6 解答例など　(担当：日野)

[6-1] 実数 a に対して，a に収束するような有理数からなる列 $\{x_n\}$ と無理数からなる列 $\{y_n\}$ をとると，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 2-a$ である．f が $x=a$ で連続であるためには，この2数は等しくないといけないから，$a=1$ が必要である．逆に f は $x=1$ で連続であることを示そう．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすると，$|y-1| < \delta$ ならば，y が有理数であっても無理数であっても $|f(y) - f(1)| < \delta = \varepsilon$. よって f は $x=1$ で連続となる．

► この例から，「関数 f がある点 a で連続であれば，f は a を含むある区間上で連続である」という命題は偽であることが分かる．

[6-2] 平均値の定理と中間値の定理を使えばよい．

[6-3] (1) $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon/M$ とおくと，$x, y \in I$ が $|x-y| < \delta\,(=\varepsilon/M)$ をみたすとき

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < M\delta = \varepsilon.$$

従って f は I 上で一様連続である．

(2) $M = \sup_{x\in I} |f'(x)|$ ($\sup\{|f'(x)| \mid x \in I\}$ のこと) とおくと仮定から M は有限値．$x, y \in I$ に対して，平均値の定理より，x と y の間の数 z をうまくとって

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$$

とできる．すると，

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq M|x-y|.$$

従って，f は I 上で Lipschitz 連続．

以上