2011 年度 微分積分学 A 演習 4 略解など　(担当：日野)

[4-1] (1) $p=1$ のときは，任意の n に対して $a_n=1$ となるので $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．$p \geq 2$ のときは D'Alembert の判定条件から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することが示せる．

(2) 大雑把に言って $|a_n|$ は n が大きいとき大体 $\frac{2}{n^2}$ に等しいので $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束すると予想できる．従って**上からの**評価を適切にすればよい．例えば $n \geq 2$ のとき $2 \leq n^2/2$ であることを使うと

$$|a_n| = \left|\frac{2}{(-1)^n n^2+2}\right| \leq \frac{2}{n^2-\frac{n^2}{2}} = \frac{4}{n^2} \qquad (n \geq 2)$$

なので $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(3) $a_n = \sqrt{n^2-1}-n = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n}$ であり，n が大きいとき a_n は大体 $-\frac{1}{\sqrt{n^2}+n} = -\frac{1}{2n}$ となるので，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $-\infty$ に発散すると予想できる．これをふまえて，

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} \leq -\frac{1}{\sqrt{n^2}+n} = -\frac{1}{2n}$$

より確かに $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $-\infty$ に発散する．(今の場合はそのまま不等式が成立した．そうならないような例については (2) のように適当な評価をすればよい．)

► (2), (3) は Cauchy の判定条件や D'Alembert の判定条件では判定できない微妙な例である．(これらの判定条件は等比級数と比較して得られるものなので，各項が多項式の逆数程度であるような (2)(3) の無限級数に適用できないのは自然なことである．)

[4-2] $|r| \geq 1$ ならば，$r^n \sin\frac{2n\pi}{3}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束しないので無限級数は発散する．$|r|<1$ のとき，$\left|r^n \sin\frac{2n\pi}{3}\right| \leq |r|^n$ で $\sum_{n=1}^{\infty} |r|^n$ は収束するので，無限級数は絶対収束する．和を求めよう．$\sin\frac{2n\pi}{3}$ の周期性に注意すると，

$$\sum_{n=1}^{3N} r^n \sin\frac{2n\pi}{3} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2\right) r^{3k}$$

なので,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{3N} r^n \sin\frac{2n\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2\right)\cdot\frac{1}{1-r^3} = \frac{\sqrt{3}r}{2(1+r+r^2)}.$$

求める無限級数が収束することは分かっているから，その和は部分列 $\sum_{n=1}^{3N} r^n \sin\frac{2n\pi}{3}$ の極限に等しい．すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}r}{2(1+r+r^2)}$.

▶ いきなり

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin\frac{2n\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + 0\right)(1 + r^3 + r^6 + \cdots)$$

の様な形式的な変形をして右辺の収束性についてのみ議論すると，無限級数の和の取り方を変えていることになる（または $\left\{\sum_{n=1}^{M} r^n \sin\frac{2n\pi}{3}\right\}_{M=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{\sum_{n=1}^{3N} r^n \sin\frac{2n\pi}{3}\right\}_{N=1}^{\infty}$ の収束性のみを考えているといってもよい）のでよろしくない．例えば次のような式変形がおかしいことはすぐ分かるだろう．

$$1-1+1-1+1-1+\cdots \overset{?}{=} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0.$$

▶ **[3-2]** の解答例のコメント内容と同様に，$|r|<1$ のときは，$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{3N} r^n \sin\frac{2n\pi}{3}$ が収束することと $\lim_{n\to\infty} r^n \sin\frac{2n\pi}{3} = 0$ であるということから $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin\frac{2n\pi}{3}$ が収束するといってもよい．証明は **[3-2]** のコメントに書いている議論と同様にすればよい．

[4-3] (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ について．$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ とおく．$x=0$ の時は $a_0 = 1, a_n = 0\ (n \geq 1)$ なので明らかに級数は絶対収束する．$x \neq 0$ のときは全ての n に対して $a_n \neq 0$ であり，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

なので D'Alembert の判定条件より級数は絶対収束する．
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ についても同様．

► 定積分と比較するというのも有効な手法で，何人かはそのように議論していたが，まだ講義では積分について論じていないのでその方法はしばらく封印するという方向でよろしく．

► この問では発散が答であったので，部分列が発散することを示せばそれで済んだ．ではもし $\left\{\sum_{n=1}^{2N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するような例の場合はどう議論したらよいだろうか．この場合は直ちに $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するとは言えない．(簡単な例は，$a_n = (-1)^n$.) このときは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることが $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件である．実際，必要条件であることは明らかである（講義で示した）．十分条件であることを示そう．$\alpha = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N} a_n$ とする．$\varepsilon > 0$ に対して $M \in \mathbb{N}$ をとって，$N \geq M$ ならば $|a_N| < \varepsilon/2$, $\left|\alpha - \sum_{n=1}^{2N} a_n\right| < \varepsilon/2$ となるようにできる．すると，$2M$ 以上の自然数 N に対して，N が偶数ならば $\left|\alpha - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| < \varepsilon/2$ であり，N が奇数ならば $N = 2N' + 1$ $(N' \geq M)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| &= \left|\alpha - \sum_{n=1}^{2N'} a_n - a_N\right| \\ &\leq \left|\alpha - \sum_{n=1}^{2N'} a_n\right| + |a_N| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

となるので，いずれにせよ $\left|\alpha - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| < \varepsilon$ となり，$\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ は α に収束する．

[3-3] (1) $\mu = \varlimsup_{n\to\infty} a_n \,(< \alpha)$, また自然数 N に対して $l_N = \sup_{n\geq N} a_n$ とする．$r = \dfrac{\mu+\alpha}{2} \in (\mu, \alpha)$ とする．$\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ の定義より $\lim_{N\to\infty} l_N = \mu$ であるから，$\varepsilon = \dfrac{\alpha-\mu}{2}\,(> 0)$ に対して，ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $|l_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．従って $n \geq N$ ならば

$$a_n \leq l_n < \alpha + \varepsilon = r.$$

(2) （どのような実数 α に対しても）命題は偽．反例の 1 つは，$a_n = \alpha + \dfrac{1}{n}$.

► レポートの添削はかなり甘いが，(1) ではどのように N を取ったか明示してほしいところ．(ε-N 論法の練習として出題しているので．)

► (1) と (2) は $<$ か $\leq$ の違いだけであるが，結論は全く異なる．

問題 [2-2](2) の補足: 前回の解答例では Cauchy 列でないことを示すことにより数列の発散を示したが，証明方法はこれに限らない．

(別証明) 数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束すると仮定して矛盾を導こう．$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \alpha = 0$ である．しかしながら，任意の n に対して $|b_n| \geq \min\{r, 1-r\}(> 0)$ であるから，これは矛盾である．

以上