2011年度 微分積分学A 演習10解答例など　(担当：日野)

[10-1] (1) $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}=\dfrac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}$

が恒等式になるように a,b,c,d の値を定めると，$a=-1$, $b=1$, $c=1$, $d=0$ となる．
従って，

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx &= \int\left\{\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}\right\}dx\\ &= -\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{1+x^4}=t$ とおくと，$\dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx=dt$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}\,dx &= \int \frac{1}{2x^4}\cdot\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2(t^2-1)}\,dt\\ &= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1}\right|+C.\end{aligned}$$

[10-2] 記号は講義のものに従う．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta\colon a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対して，f は単調増加であることから

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(t_k-t_{k-1}),\qquad s_\Delta=\sum_{k=1}^{n}f(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})$$

である．すると，

$$\begin{aligned}0\le S-s\le S_\Delta-s_\Delta &= \sum_{k=1}^{n}\bigl(f(t_k)-f(t_{k-1})\bigr)(t_k-t_{k-1})\\ &\le |\Delta|\sum_{k=1}^{n}\bigl(f(t_k)-f(t_{k-1})\bigr)\\ &\le |\Delta|\bigl(f(b)-f(a)\bigr).\end{aligned}$$

よって，分割幅が 0 に収束するような分割の列を考えることにより $S - s = 0$ が従い，f は区間 $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能である．

[10-3] 計算のみ．

以上